

Sujet de Thèse

Étude des propriétés dynamiques et spectrales du modèle de Bose-Hubbard sur des réseaux finis.

proposé par : Maher Zerzeri ¹ (**directeur de thèse**) & Zied Ammari (coencadrant, IRMAR).

Description de la Thèse: Les systèmes de réseaux quantiques sont des modèles courants intervenant dans la physique de la matière condensée et celle des hautes énergies. Ils partagent une certaine simplicité et une certaine efficacité en comparaison avec d'autres modèles plus réalistes. Cependant, leur analyse met en lumière plusieurs phénomènes physiques tels que la magnétisation, la superfluidité et la supraconductivité, ainsi que des aspects de la mécanique quantique statistique comme les transitions de phases et les brisures spontanées de symétrie. Voir [10, 12, 6]. Dans les littératures mathématique et physique, ces modèles renvoient par exemple à des systèmes de spins quantiques, des fermions ou des bosons sur des réseaux, et ils ont été largement étudiés tant du point de vue expérimental que du point de vue théorique, voir [7, 8, 9] et aussi [5, 11, 13].

Le but de cette thèse est d'initier une étude rigoureuse des propriétés dynamiques et spectrales d'un exemple important et pertinent de systèmes quantiques à plusieurs corps sur un réseau, à savoir le modèle de Bose-Hubbard. Depuis les années 1980, il est reconnu qu'un tel exemple constitue un modèle exploitable et significatif pour décrire certains phénomènes physiques, montrant un comportement dynamique complexe. En particulier, il a été mis en oeuvre de manière expérimentale à l'aide d'atomes ultra-froids piégés dans un potentiel optique généré par des faisceaux laser et, plus important encore, une transition de phase d'un superfluide-isolant de Mott a été observée par M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, et I. Bloch, voir [11].

Dans ce cadre, notre but est d'explorer les aspects mathématiques sous-tendant les propriétés physiques du modèle de Bose-Hubbard et de mettre en lumière le comportement de systèmes de réseaux quantiques en interaction. Plus précisément, il s'agit d'aborder les points suivants :

- 1) La description précise des états cohérents du modèle de Bose-Hubbard et le lien avec l'équation d'évolution de Schrödinger non-linéaire discrète.
- 2) Établir les approximations d'ordre élevé de l'état fondamental du système dans un certain régime semi-classique.
- 3) Établir une formule de type Weyl et/ou statistiques concernant les valeurs propres du hamiltonien de Bose-Hubbard correspondant.

¹Unité de recherche: *Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications (UMR 7539)*, Université Sorbonne Paris Nord, contact : zerzeri@math.univ-paris13.fr.

En particulier, nous nous proposons d'apporter une base mathématique solide dans le cadre de la méthode d'approximation d'ordre deux liée à la théorie du « spectre d'excitation de Bogoliubov ». De plus, nous devons proposer de nouveaux outils mathématiques adaptés pour traiter les différents régimes considérés en nous appuyant sur des avancées récentes dans certains problèmes comparables. Voir [1, 2, 3, 4].

Dans une perspective plus large, le projet de thèse est une tentative de comprendre les différents régimes dynamiques du(des) système(s) Bose-Hubbard d'un point de vue d'analyse multi-échelle.

PhD Thesis proposal

Title: *Study of dynamical and spectral properties of the Bose-Hubbard model on finite lattices.*

by : Maher Zerzeri (**Thesis Director**) & Zied Ammari (co-supervisor).

Description of the Thesis: Quantum lattice systems are common models in condensed matter and high energy physics. They share a certain simplicity and effectiveness compared to more realistic models, yet their analysis sheds light on several physical phenomena like magnetization, superfluidity and superconductivity as well as aspects of quantum statistical mechanics like phase transitions and spontaneous symmetry breaking (see e.g. [10, 12, 6]). In mathematical and physical literature, these models refer for instance to quantum spin systems, fermions or bosons in lattices and they have been widely studied from experimental and theoretical standpoints (see e.g. [7, 8, 9] and also [5, 11, 13]).

The goal of this thesis is to initiate a rigorous study on dynamical and spectral properties of a significant and important example of lattice many-body quantum systems, namely the Bose-Hubbard model. Since the eighties such example has been recognized as a tractable physically meaningful model exhibiting complex dynamical behavior. In particular, it was performed experimentally as ultra-cold atoms trapped in an optical potential generated by wave laser beams and, more importantly, a superfluid-mott insulator phase transition was observed [11].

In this framework, we aim to explore the mathematical aspects lying behind the Bose-Hubbard physical properties and to shed light on the behavior of interacting lattice quantum systems. Specifically, the following issues should be addressed:

- 1) Sharp description of coherent dynamics of the Bose-Hubbard model and relationship with the Discrete Non-linear Schrödinger evolution.
- 2) High order approximations of the ground state energy.
- 3) Weyl's law and statistics of the eigenvalues of the Bose-Hubbard Hamiltonian.

In particular, we propose to give a firm mathematical basis for the second order approximation method related to Bogoliubov's theory of excitation spectrum. Moreover, we shall introduce

some new mathematical tools in the topic by drawing on the recent progress in some other related problems [1, 3, 4].

In a broader perspective, the thesis project is an attempt to understand the different dynamical regimes of the Bose-Hubbard system from a multiscale analysis point of view.

References

- [1] Z. Ammari and M. Falconi. Wigner measures approach to the classical limit of the Nelson model: Convergence of dynamics and ground state energy. *J. Stat. Phys.*, 157 (2):330–362, 10 2014.
- [2] Z. Ammari and F. Nier. Mean field limit for bosons and infinite dimensional phase-space analysis. *Annales Henri Poincaré*, 9(8):1503–1574, 2008.
- [3] Z. Ammari and A. Ratsimanetrimanana, *High temperature convergence of the kms boundary conditions: The bose-hubbard model on a finite graph*, Communications in Contemporary Mathematics 2021.
- [4] Zied Ammari and Maher Zerzeri, *On the classical limit of self-interacting quantum field Hamiltonians with cutoffs*, Hokkaido Math. J. **43** (2014), no. 3, 385–425.
- [5] P. Anders, E. Gull, L. Pollet, M. Troyer, and P. Werner, Dynamical mean-field theory for bosons, *New Journal of Physics*, vol. 13, no. 7, p. 075013, 2011
- [6] Immanuel Bloch, Jean Dalibard, and Wilhelm Zwerger, *Many-body physics with ultracold gases*, *Reviews of Modern Physics* **80** (2008), no. 3, 885–964.
- [7] Dyson, F. J., E. H. Lieb, and B. Simon. Phase transitions in the quantum Heisenberg model. *Phys. Rev. Lett.* 37 (1976) no. 3, 120-23.
- [8] Fröhlich, J., R. B. Israel, E. H. Lieb, and B. Simon. Phase transitions and reflection positivity, I. General theory and long-range lattice models. *Comm. Math. Phys.* 62 (1978) no. 1,1-34.
- [9] R. Fernández, J. Fröhlich, D. Ueltschi. Mott Transition in Lattice Boson Models *Comm. Math. Phys.* 266 (2006), 777-795.
- [10] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, Boson localization and the super-fluid insulator transition, *Phys. Rev. B*, vol. 40, p. 546, 1989.
- [11] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, and I. Bloch, Quantum phase transition from a super-fluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms, *Nature*, vol. 415, p. 39, 2002.
- [12] Christian Gross and Immanuel Bloch, *Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices*, *Science* **357** (2017), no. 6355, 995–1001.
- [13] Ana Maria Rey, Ultracold bosonic atoms in optical lattices. PHD Thesis, University of Maryland.